अध्यायः

1

परिमेय-संख्याः

1.1 भूमिका

गणिते वयं प्रायः साधारणं समीकरणं पश्यामः। उदाहरणार्थं समीकरणम्

$$x + 2 = 13 \quad (1)$$

अस्य समीकरणस्य समाधानम् x=11। यतः x इत्यस्य इदं मानम् एतत् समीकरणं सन्तोषयति। उत्तरम् 11, एका प्राकृतसंख्या वर्त्तते। अपर पक्षे समीकरणम्

$$x + 5 = 5 \quad (2)$$

इत्यस्य उत्तरं शून्यम् अस्ति या एका पूर्णसंख्या अस्ति। यदि वयं केवलं प्राकृत-संख्यां यावत् सीमिताः भवेम तर्हि समीकरणं (2) समाधातुं न शक्नुमः। समीकरणं (2) सदृशं समीकरणं समाधातुं वयं प्राकृत-संख्यानां समूहे शून्यं मेलितवन्तः तथा एतं नवीनं समूहं पूर्णसंख्या नाम्ना प्रख्यापितवन्तः। यद्यपि

$$x + 18 = 5 \quad (3)$$

सदृशं समीकरणं समाधातुं पूर्णसंख्या अपि पर्याप्ता नास्ति। किं भवन्तः जानन्ति 'किमर्थम्'? अस्माकं संख्या -13 इत्यस्य आवश्यकता अस्ति या पूर्णा संख्या नास्ति। एतेन वयं पूर्णांकः (धनात्मकः ऋणात्मकश्च) विषये प्रेरिताः। अवधानं दीयतां धनात्मकः पूर्णांकः प्राकृतसंख्यानाम् अनुरूपः अस्ति। भवन्तः विचारितुं शक्नुवन्ति यत् साधारण-समीकरणानि समाधातुम् अस्माकं पार्श्वे उपलब्ध-पूर्णाङ्कानां सूचीषु पर्याप्ताः संख्याः सन्ति। निम्नलिखित-समीकरणानां कृते विचारयामः -

$$2x = 3 \quad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \quad (5)$$

एतेषां समाधानं वयं पूर्णाङ्केषु न ज्ञातुं शक्नुमः (एतस्य निरीक्षणं करोतु)।

समीकरणं (4) इति समाधातुं संख्या $\frac{3}{2}$ तथा (5) समाधातुं संख्या $\frac{-7}{5}$ इत्यस्य आवश्यकता अस्ति।

एतेन वयं परिमेय सङ्ख्यानां समूहं प्रति अग्रसराः भवेम। वयं पूर्वमेव परिमेय-संख्या-विषये मूलसंक्रियां पठितवन्तः। एतावत् पर्यन्तं वयं विभिन्नप्रकारिकां संख्यां पठितवन्तः तासां संक्रियाणां कञ्चित् गुणधर्मम् अन्वेष्टुं प्रयत्नं कुर्मः।

1.2 परिमेयसंख्यानां गुणधर्माः

1.2.1 संवृताः

(i) पूर्णसंख्याः

आगच्छन्तु, एकवारं पुनः संक्षेपेण पूर्णसंख्यानां कृते सर्वासां संक्रियाणामुपरि संवृतगुणधर्मस्य चर्चां कुर्मः।

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
सङ्कलनम्	0+5 = 5, एका पूर्णासंख्या अस्ति। 4+7 = ... किमेषा एका पूर्णासंख्या अस्ति ? व्यापकरूपेण केचित् द्वे संख्ये a तथा bइत्यस्य कृते a+b एका पूर्णा संख्या अस्ति।	पूर्णसङ्ख्याः संकलनान्तर्गते संवृताः सन्ति।
व्यवकलनम्	5 - 7 = -2, या एका पूर्णसङ्ख्या नास्ति।	पूर्णसङ्ख्याः व्यवकलनान्तर्गते संवृताः न सन्ति।
गुणनम्	$0 \times 3 = 0$, एका पूर्णासंख्या अस्ति। 3×7 =.... किमेषा एका पूर्णासंख्या अस्ति ? व्यापकरूपेण यदि a तथा b केचित् द्वे पूर्णसंख्येस्तः तर्हि तस्य गुणनफलं ab एका पूर्णा संख्या अस्ति।	पूर्णसङ्ख्याः गुणाकारान्तर्गते संवृताः सन्ति।
वभिाजनम्	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, एका पूर्णसङ्ख्या नास्ति।	पूर्णसङ्ख्याः भागाकारान्तर्गते संवृताः न सन्ति।

प्राकृतसंख्यानां कृते सर्वासां चतसृणां संक्रियाणाम् अन्तर्गतं संवृतगुणस्य अन्वेषणं कुर्वन्तु।

(ii) पूर्णाङ्कः

आगच्छन्तु, इदानीं वयं तासां संक्रियाणां स्मरणं कुर्मः यस्याः अन्तर्गते पूर्णाङ्कः संवृतः अस्ति।

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
सङ्कलनम्	-6 + 5 = -1, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। किं - 7 + (-5) एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? किं 8 + 5 एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? व्यापकरूपेण कौचित् द्वौ पूर्णाङ्कौ a तथा b इत्यस्य कृते a+b एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।	पूर्णाङ्काः सङ्कलनान्तर्गते संवृतः सन्ति।

व्यवकलनम्	7 - 5 = 2, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। किं 5 - 7 एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? -6 - 8 = -14, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। -6 - (- 8) = 2, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। किं 8 - (- 6) एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? व्यापकरूपेण कौचित् द्वौ पूर्णाङ्कौ a तथा b इत्यस्य कृते a-b इत्यपि एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। परीक्षणं कुर्वन्तु किं b-a अपि एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ?	पूर्णाङ्काः व्यवकलनान्तर्गते संवृतः न सन्ति।
गुणनम्	5 × 8 = 40, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। किं - 5 × 8 एकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? - 5 × (-8) = 40, एकः पूर्णाङ्कः अस्ति। व्यापकरूपेण कौचित् द्वौ पूर्णाङ्कौ a तथा b इत्यस्य कृते a × b इत्यपि एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।	पूर्णाङ्काः गुणनान्तर्हते संवृतः सन्ति।
विभाजनम्	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, एकः पूर्णाङ्कः नास्ति।	पूर्णाङ्काः भागाकारान्तर्गते संवृतः न सन्ति।

भवन्तः दृष्टवन्तः यत् पूर्णसंख्याः संकलनान्तर्गते गुणनान्तर्गते च संवृताः सन्ति परन्तु विभाजनार्तर्गते व्यवकलनान्तर्गते च संवृताः न सन्ति तथापि पूर्णाङ्कः संकलनान्तर्गते, व्यवकलनान्तर्गते, गुणाकारान्तर्गते च संवृताः सन्ति परन्तु भागाकारान्तर्गते संवृताः न सन्ति।

(iii) परिमेयसंख्याः

स्मरन्तु ईदृशी संख्या परिमेय संख्या भवति p/q रूपे लेखितुं शक्नुवन्ति, यत्र p तथा q पूर्णाङ्कः अस्ति एवं $q \neq 0$ अस्ति। उदाहरणार्थम् $-\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ परिमेय-सङ्ख्ये स्तः। यतो हि संख्याः 0, - 2, 4, $\frac{P}{q}$, रूपे लेखितुं शक्यते अत एव एताः परिमेय-संख्याः सन्ति। (अस्याः परीक्षणं कुर्वन्तु)।

(a) भवन्तः जानन्त्येव यत् परिमेय-संख्यां कथं योजयन्ति ? आगच्छन्तु केषाञ्चित् युग्मानां योगं जानीमः -

$$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56}$$ (एका परिमेया संख्या)

$$\frac{-3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=...$$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=...$$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

वयं पश्यामः यत् द्वयोः परिमेय-संख्ययोः योगः एकपरिमेय-संख्या अस्ति । अधिकानां परिमेय-संख्यानां युग्मार्थम् एतस्य परीक्षणं करोतु । एवं रीत्या वयं वदामः यत् परिमेय-संख्याः संकलनान्तर्गते संवृताः सन्ति । अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये a तथा b इत्यस्य कृते a+b एका परिमेय-संख्या अस्ति ।

(b) किं द्वयोः परिमेय-संख्ययोः योगः अन्तरः अपि एका परिमेय-संख्या भविष्यति ?

वयं प्राप्नुमः $\frac{-5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{-5\times3-2\times7}{21}=\frac{-29}{21}$ (एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$\frac{5}{8}-\frac{4}{5}=\frac{25-32}{40}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$\frac{3}{7}-\left(\frac{-8}{5}\right)=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

अधिक परिमेय-संख्यानां युग्मार्थम् एतस्य परीक्षणं करोतु । एवं रीत्या वयं प्राप्नुमः यत् परिमेय-संख्याः व्यवकलनान्तर्गते संवृताः सन्ति । अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये a तथा b इत्यस्य कृते a -b एका परिमेय-संख्या अस्ति ।

(c) आगच्छन्तु, इदानीं वयं द्वयोः परिमेय-संख्ययोः गुणनफलस्य चर्चां कुर्मः ।

$\frac{-2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{-8}{15};\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$ (उभयं गुणनफलं परिमेय-संख्ये स्तः)

$-\frac{4}{5}\times\frac{-6}{11}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

परिमेय-संख्यानां काञ्चन् युग्मान् गृह्णातु अथ परीक्षणं करोतु यत् तेषां गुणनफलमपि एका परिमेय-संख्या अस्ति। अतः वयम् एतत् वक्तुं पारयामः यत् परिमेय-संख्याः गुणाकारान्तर्गते संवृताः सन्ति । अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये a तथा b इत्यस्य कृते a × b एका परिमेय-संख्या अस्ति ।

(d) वयं लिखामः यत् $\frac{-5}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{-25}{6}$ (एका परिमेया संख्या अस्ति)

$\frac{2}{7}\div\frac{5}{3}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

$\frac{-3}{8}\div\frac{-2}{3}=\ldots$ (किम् एषा एका परिमेया संख्या अस्ति ?)

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् परिमेय-संख्याः विभाजनान्तर्गते संवृताः सन्ति ? वयं जानीमः यत् कस्यापि परिमेय-संख्यायाः a इत्यस्य कृते a ÷ 0 परिभाषितः न अस्ति । अतः परिमेय-संख्याः विभाजनातर्गत संवृताः न सन्ति तथापि यदि वयं शून्यं न मेलयामः चेत् अपरासां सर्वासां परिमेय-संख्यानां समूहः विभाजनान्तर्गते संवृतः अस्ति ।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखित-सारण्यां रिक्तस्थानानि पूरयेत्।

संख्याः	अन्तर्गते संवृताः सन्ति			
	योगस्य	**व्यवकलनस्य**	**गुणनम्**	**विभाजनम्**
परिमेय-संख्याः	आम्	आम्	……	न
पूर्णाङ्कः	……	आम्	……	न
पूर्णसंख्याः	……	……	आम्	……
प्राकृतसंख्याः	……	न	……	……

1.2.2 क्रम-विनिमेयता

(i) पूर्णसंख्याः

निम्नलिखित-सारण्याः रिक्तस्थानानि पूरयन्तः विभिन्न-संक्रियाणामन्तर्गते पूर्णसंख्यायाः स्मरणं कुर्वन्तु -

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
योगः	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = \ldots + \ldots = \ldots$ केचित् द्वे पूर्णसंख्ये a तथा b इत्यस्य कृते $a+b = b+a$	योगक्रमः विनिमेयः अस्ति।
व्यवकलनम्	………	व्यवकलनक्रमः विनिमेयः नास्ति।
गुणनम्	………	गुणनम् विनिमेयः अस्ति।
विभाजनम्	………	विभाजनक्रमः विनिमेयः नास्ति।

परीक्षणं करोतु किं प्राकृतसंख्यानां कृते एते संक्रियक्रमाः विनिमेयाः सन्ति।

(ii) पूर्णाङ्कः

निम्नलिखित-सारण्याः रिक्तस्थानानि पूरयतु तथा पूर्णाङ्कार्थं विभिन्न-संक्रियाणां क्रमविनिमेयतायाः परीक्षणं करोतु -

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
योगः व्यवकलनम् गुणनम् विभाजनम्	……… किं $5 - (-3) = -3 - 5$? ……… ………	योगक्रमः विनिमेयः अस्ति। व्यवकलनक्रमः विनिमेयः नास्ति। गुणाकारक्रमः विनिमेयः अस्ति। भागाकारक्रमः विनिमेयः नास्ति।

(iii) परिमेयसंख्याः

(a) योगः

भवन्तः अवगच्छन्ति यत् द्वयोः परिमेय-संख्ययोः संकलनं कथं भवति। आगच्छन्तु, अत्र वयं काञ्चन-युग्मान् संकलयामः -

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21} \text{ तथा } \frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{21}$$

अत एव, $\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

एतदतिरिच्य $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots$ तथा $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots$

किम् $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right)$?

किम् $\frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)$?

भवन्तः अवगच्छन्ति यत् द्वे परिमेय-संख्ये कस्मिन्नपि क्रमे योजितुं शक्यते। वयं कथयामः यत् परिमेय-संख्यार्थं योगक्रमः विनिमेयः अस्ति। अर्थात् केचित् द्वे परिमेय-संख्ये aतथा b इत्यस्य कृते $a + b = b + a$।

(b) व्यवकलनम्

किम् $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$ अस्ति ?

किम् $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ अस्ति ?

भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् परिमेय-संख्यार्थं व्यवकलनक्रमः विनिमेयः नास्ति।

(c) गुणनम्

वयं प्राप्नुमः, $\frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$

किम् $\frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$ अस्ति ?

एतादृशानां गुणनफलानां कृते परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः अवगच्छन्ति। यत् परिमेय-संख्यार्थं गुणाकारक्रमः विनिमेयः अस्ति। व्यापकरूपेण केचित् द्वे परिमेय-संख्ये a तथा b इत्यस्य कृते $a \times b = b \times a$ भवति।

(d) विभाजनम्

किम् $\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ अस्ति ?

भवन्तः अवगच्छन्ति। यत् उभयोः पक्षयोः व्यञ्जकः समानः नास्ति।
अत एव परिमेय-संख्यानां कृते भागाकारक्रमः विनिमेयः नास्ति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखित-सारण्यां रिक्तस्थानानि पूरयेत् ।

संख्याः	क्रमविनिमेयः			
	योगाय	व्यवकलनाय	गुणाकाराय	भागाकाराय
परिमेयसंख्याः	आम्	......	......	......
पूर्णाङ्कः	......	न	......	......
पूर्णसंख्याः	......	......	आम्	......
प्राकृतसंख्याः	......	....	......	न

1.2.3 साहचर्यता (सहचारिता)

(i) पूर्णसंख्याः

निम्नलिखित-सारणी-माध्यमेन पूर्णसंख्यार्थं चतसृणां संक्रियाणां साहचर्यतां स्मरन्तु -

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
योगः	....	योगः साहचर्यः अस्ति ।
व्यवकलनम्	....	व्यवकलनं साहचर्यं नास्ति ।
गुणनम्	किं $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? किं $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? कासाञ्चित् तिसृणां पूर्णसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	गुणाकारः साहचर्यः अस्ति ।
विभाजनम्	....	भागाकारः साहचर्यः नास्ति ।

एतां सारणीं पूरयन्तु तथा स्तम्भे दत्तटिप्पणीं सत्यापितां कुर्वन्तु । प्राकृत-संख्यार्थं विभिन्न-सक्रियाणां साहचर्यतायाः स्वयं परीक्षणं कुर्वन्तु ।

(ii) पूर्णाङ्कः

पूर्णाङ्कानां कृते चतसृणां संक्रियाणां साहचर्यतां निम्नलिखित-सारणी-माध्यमेन द्रष्टुं शक्यते -

संक्रियाः	संख्याः	टिप्पणी
योगः	$(-2) + [3+(-4)]$ $= [(-2) + 3)] + (-4)$ किम् अस्ति ? $(-6) + [(-4) + (-5)] = [(-6)+(-4)]+(-5)$ किम् अस्ति ? कासाञ्चित् तिसृणां पूर्णसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते $a + (b+c) = (a+b) + c$	योगः साहचर्यः अस्ति ।

व्यवकलनम्	किं 5 - (7 - 3) = (5 - 7) -3 अस्ति ?	व्यवकलनं साहचर्यं नास्ति।
गुणनम्	किं 5 ×[(- 7) × (- 8)] = [5 ×(-7)] × (-8) अस्ति ? किं (- 4) × [(-8) × (-5)] [(- 4) × (-8)] ×(- 5) अस्ति ? कासाञ्चित् तिसृणां पूर्णसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते a × (b × c) = (a × b) × c	गुणनम् साहचर्यः अस्ति।
विभाजनम्	किं [(-10) ÷ 2] ÷ (- 5) = (- 10) ÷ [2 ÷(-5)] अस्ति ?	विभाजनम् साहचर्यः नास्ति।

(iii) परिमेयसंख्याः

(a) **योगः**

वयं प्राप्नुमः -

$$\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

$$\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

अत एव, $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$

जानन्तु $\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ तथा $\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$

किम् एतौ द्वौ अपि योगौ समानौ स्तः ?

केचित् परिमेय-सङ्ख्ये इतोऽपि गृह्णन्तु, उपर्युक्त-उदाहरणानाम् इव ते योजयन्तु तथा पश्यन्तु किं द्वौ अपि योगौ समानौ स्तः ? वयं प्राप्नुमः यत् परिमेयसंख्यार्थं योगः साहचर्यः अस्ति। अर्थात् कासाञ्चित् तिसृणां परिमेयसंख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते a + (b + c) = (a + b) + c।

(b) **व्यवकलनम्**

किं $=\frac{-2}{3}+\left[\frac{-4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{-2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{3}$ अस्ति ?

स्वयं परीक्षणं कुर्वन्तु। परिमेय-संख्यानां कृते व्यवकलनं साहचर्यं नास्ति।

(c) गुणाकारः

आगच्छन्तु, वयं गुणाकारस्य कृते साहचर्यतायाः परीक्षणं कुर्मः।

$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\ \frac{2}{9}=\ldots$$

वयं प्राप्नुमः यत् $\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$

किं $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$ अस्ति ?

केचन परिमेय-सङ्ख्ये गृह्णन्तु अथ स्वयं परीक्षणं कुर्वन्तु। वयं प्राप्नुमः यत् परिमेय-संख्यानां कृते गुणाकारः साहचर्यः अस्ति। अर्थात् कासाञ्चित् तिसृणां परिमेय-संख्यानां a, b तथा c इत्यस्य कृते $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$।

(d) भागाकारः

आगच्छन्तु पश्यामः यत् -

$\frac{1}{2}\div\left[\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right]=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$ अस्ति ? वयं प्राप्नुमः,

वाम-पक्षः $=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right)$

$=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{2}\right)$ ($\frac{2}{5}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{5}{2}$ अस्ति)

$=\frac{1}{2}\div\left(-\ \frac{5}{6}\right)$

$=\ldots\ldots$

पुनः दक्षिणपक्षः $=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}$

$=\ \frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=\ldots$

किं वामपक्षः = दक्षिणपक्षः अस्ति ? स्वयमेव परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः अवगच्छन्ति। यत् परिमेय-संख्यानां कृते विभाजनम् साहचर्यः नास्ति।

प्रयासं करोतु

निम्नलिखित-सारण्यां रिक्तस्थानानि पूरयन्तु ।

संख्याः	साहचर्यः			
	योगाय	व्यवकलनाय	गुणाकाराय	भागाकाराय
परिमेय-संख्याः	......	......	......	न
पूर्णाङ्कः	......	......	आम्	......
पूर्णसंख्याः	आम्	......	......	......
प्राकृतसंख्याः	......	न	......	......

उदाहरणम् 1 - जानन्तु $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

उत्तरम् - $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

$$=\frac{198}{462}+\left(\frac{-252}{462}\right)+\left(\frac{-176}{462}\right)+\left(\frac{105}{462}\right)$$

(अवधेयम् 7, 11, 21 तथा 22 इत्यस्य ल.स.प. 462 अस्ति ।)

$$=\frac{198-252-176+105}{462}=\frac{-125}{462}$$

वयम् एतत् निम्नलिखित-रीत्या अपि समाधातुं शक्नुमः -

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$$

$$=\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$$ = (क्रमविनिमेयतायाः साहचर्यतायाश्च उपयोग-द्वारा)

$$=\left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$$

(7 तथा 21 इत्यस्य ल.स.प. 21 अस्ति । 11 तथा 22 इत्यस्य ल.स.प. 22 अस्ति ।)

$$=\frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right)=\frac{22-147}{462}+\frac{-125}{462}$$

किं भवन्तः विचारयन्ति यत् क्रमविनिमेयतायाः अथ साहचर्यतायाः गुणधर्मयोः सहायतया परिकलनं सरलं जातम् ?

उदाहरणम् 2 - जानन्तु $\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$

समाधानं वयं प्राप्तवन्तः

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(-\frac{4\times3}{5\times7}\right)\times\left(\frac{15\times(-14)}{16\times9}\right)$$

$$=\frac{-12}{35}\times\left(\frac{-35}{24}\right)=\left(\frac{-12\times(-35)}{35\times24}\right)=\frac{1}{2}$$

वयम् एतत् निम्नलिखित-रीत्या अपि समाधातुं शक्नुमः -

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$\left(\frac{-4}{5}\times\frac{15}{16}\right)\times\left[\frac{3}{7}\times\left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (क्रमविनिमेयतायाः साहचर्यतायाश्च उपयोग-द्वारा)

$$\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

1.2.4 शून्यं (0) इत्यस्य भूमिका

निम्नलिखितेषु विचारं कुर्वन्तु -

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (शून्यं पूर्णसङ्ख्यया सह संकलनम्)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (शून्यं पूर्णाङ्केन सह संकलनम्)

$\frac{-2}{7}+\ldots=0+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{-2}{7}$ (शून्यं परिमेय-सङ्ख्यया सह संकलनम्)

भवन्तः पूर्वमपि एतादृशं योगं ज्ञातवन्तः ? एतादृशम् इतोऽपि जानन्तु। भवन्तः किं पश्यन्ति ? भवन्तः अवगच्छन्ति यत् पूर्णसङ्ख्यया सह योजयामः चेत् सति पुनः पूर्णसंख्या एव भवति। तथ्यं पूर्णाङ्केभ्यः परिमेय-संख्याभ्यश्च सत्यम् अस्ति।

व्यापकरूपेण - $a + 0 = 0 + a = a$, (यत्र a एका पूर्णासंख्या अस्ति।)

$b + 0 = 0 + b = b$, (यत्र b एकः पूर्णाङ्कः अस्ति।)

$c + 0 = 0 + c = c$, (यत्र c एका परिमेय-संख्या अस्ति।)

परिमेयसंख्यायाः योगाय शून्यम् एकं तत्समकम् अस्ति। एतत् पूर्णाङ्कानां पूर्ण-संख्यानाञ्च कृते शून्यं योज्यं तत्समकम् अस्ति।

1.2.5 1 इत्यस्य भूमिका

वयं प्राप्नुमः यत्

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5 \text{ (पूर्णसंख्यया सह 1 इत्यस्य गुणाकारः)}$$

$$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ?

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् यदा कयापि परिमेय-संख्यया सह 1 संख्यायाः गुणनं करिष्यन्ति तदा तामेव संख्यां भवन्तः गुणफलरूपेण प्राप्स्यन्ति। कासाञ्चित् परिमेय-संख्यानां कृते एतस्य परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः a इत्यस्य कृते $a \times 1 = 1 \times a = a$ भविष्यति। वयं कथयामः यत् 1 परिमेय-संख्यायाः कृते गुणनात्मकः तत् समकः अस्ति। किं 1 पूर्णाङ्कानां परिमेय-संख्यानाञ्च कृतेऽपि गुणनात्मकः तत्समकः अस्ति ?

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु तथा लिखन्तु

यदि कश्चिद् गुणधर्मः परिमेय-संख्यानं कृते सत्यम् अस्ति तर्हि किं सः गुणधर्मः पूर्णाङ्कानां परिमेय-संख्यानाञ्च कृतेऽपि सत्यं भविष्यति ? कः गुणधर्मः अस्य कृते सत्यं भविष्यति कः सत्यं न भविष्यति ?

1.2.6 एक-संख्यायाः ऋणात्मकः

पूर्णाङ्कानाम् अध्ययन-काले भवन्तः पूर्णाङ्कानाम् ऋणात्मकं प्राप्तवन्तः। 1 इत्यस्य ऋणात्मकः कः ? एतत् - 1 अस्ति, यतो हि $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$ अस्ति। अतः (-1) इत्यस्य ऋणात्मकः किम् ? एतत् 1 भविष्यति।

एतदतिरिच्य $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ अस्ति। एवं प्रकारेण वयं कथयामः यत् -2 इत्यस्य ऋणात्मकः अथवा योज्यप्रतिलोमः 2 अस्ति यः विलोमतः अपि सत्यम् अस्ति। व्यापकरूपेण कस्यापि पूर्णाङ्कस्य a इत्यस्य कृते $a + (-a) = (-a) + a = 0$, एवं प्रकारेण $- a$ इत्यस्य ऋणात्मकः a अस्ति तथा a इत्यस्य ऋणात्मकः $- a$ वर्त्तते।

कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः $\frac{2}{3}$ कृते वयं प्राप्नुमः यत् -

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2+(-2)}{3} = 0$$

एतदतिरिच्य $\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$ (कथम् ?)

एवमेव $\frac{-8}{9} + \ldots = \ldots + \left(\frac{-8}{9}\right) = 0$

$$\ldots + \left(\frac{-11}{7}\right) = \left(\frac{-11}{7}\right) + \ldots = 0$$

व्यापकरूपेण कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः $\frac{a}{b}$ इत्यस्याः कृते $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$ प्राप्तः अस्ति। वयं कथयामः यत् $\frac{a}{b}$ इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः $-\frac{a}{b}$ अस्ति तथा $\left(-\frac{a}{b}\right)$ इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः $\frac{a}{b}$ अस्ति।

1.2.7 व्युत्क्रमः

भवन्तः $\frac{8}{21}$ इति संख्यां कया परिमेय-संख्यया सह यस्मात् गुणनफलं 1 भवेत् ? स्पष्टरूपेण $\frac{2}{8}$ इत्यनेन गुणनं कुर्मः। $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$ अस्ति।

एवमेव $\frac{-5}{7}$ इति संख्यां $\frac{7}{-5}$ इत्यनेन सह गुणाकारं कुर्यात् यस्मात् गुणनफलं 1 प्राप्नोत्।

वयं कथयामः यत् $\frac{8}{21}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{21}{8}$ अस्ति तथा $\frac{-5}{7}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः $\frac{7}{-5}$ अस्ति।

किं भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति यत् शून्यस्य व्युत्क्रमः कः अस्ति ? किं काचित् एषा संख्या अस्ति यां शून्येन साकं गुणाकारकरणेन 1 प्राप्नोत्। अतः शून्यस्य कोऽपि व्युत्क्रमः नास्ति। वयं कथयामः यत् एका

$\frac{c}{d}$ परिमेया संख्या अपरा $\frac{a}{b}$ संख्यायाः $\frac{a}{b}$ इत्यस्याः व्युत्क्रमः भवति यदि।

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$

1.2.8 परिमेय-संख्यानां कृते गुणनयोगे वितरकता

एतत् तथ्यं ज्ञातुं परिमेय-संख्यां $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{-5}{6}$ स्वीकुर्वन्तु।

$$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right\}=\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

एतदतिरिच्य $\quad =\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{-3\times2}{4\times3}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$

तथा $\quad \frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}=\frac{5}{8}$

अत एव $\quad \left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

> संकलने व्यवकलने च गुणाकारस्य वितरकता
>
> सर्वासां परिमेय-संख्यानां a, b तथा c इत्येतासां कृते a (b + c) = ab + ac, a (b - c) = ab - ac

अतः $$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\frac{-5}{6}\right\}=\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)$$

प्रयासं करोतु

वितरकतायाः उपयोगेन निम्नलिखितस्य मानं जानातु ।

(i) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{12}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16}\times\frac{4}{12}\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times\frac{-3}{9}\right\}$

यदा भवन्तः वितरकतायाः उपयोगं कुर्वन्ति तदा एकं गुणनफलं गुणनफलद्वयस्य योगरूपे अथवा अन्तररूपे विभक्तं कुर्वन्ति ।

उदाहरणम् 3 निम्नलिखितस्य योज्य-प्रतिलोमं लिखतु -

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

समाधानम् -

(i) $\frac{-7}{19}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $\frac{7}{19}$ अस्ति यतो हि $\frac{-7}{19}+\frac{7}{19}=\frac{-7+7}{19}=\frac{0}{19}=0$ अस्ति ।

(ii) $\frac{21}{112}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः अस्ति । $\frac{-21}{112}$ (परीक्षणं करोतु)

उदाहरणम् 4 सत्यापितं करोतु यत् निम्नलिखितस्य कृते - (- x) तथा x समानम् अस्ति ।

(i) $x=\frac{13}{17}$ (ii) $x=\frac{-21}{31}$

समाधानम् -

(i) वयं प्राप्तवन्तः $x=\frac{13}{17}$

$x=\frac{13}{17}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $x=\frac{-13}{17}$ अस्ति, यतो यतः $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$।

समीकरणं $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$, प्रदर्शयति यत् $\frac{-13}{17}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $\frac{13}{17}$ अस्ति ।

अथवा $-\left(\frac{-13}{17}\right)=\frac{13}{17}$, अर्थात् - (- x) = x

(ii) $x=\frac{-21}{31}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमःअस्ति $-x=\frac{-21}{31}$, यतः $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$ ।

समीकरणं $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$, प्रदर्शयति यत् $\frac{21}{31}$ इत्यस्य योज्य-प्रतिलोमः $\frac{-21}{31}$ अस्ति । अर्थात् - (- x) = x अस्ति ।

उदाहरणम् 5 जानन्तु - $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$

समाधानम् - $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$ (क्रमविनियमता द्वारा)

$$=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}=\frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{14} \text{ (वितरकता द्वारा)}$$

$$=\frac{-3}{7}\times 1-\frac{1}{14}=\frac{-6-1}{14}=\frac{-1}{2}$$

प्रश्नावली 1.1

1. उचितगुणधर्माणाम् उपयोगेन निम्नलिखितस्य मानं जानन्तु।

(i) $-\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5}\times\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{14}\times\frac{2}{5}$

2. निम्नलिखिते प्रत्येकस्य योज्य-प्रतिलोमं लिखन्तु।

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

3. निम्नलिखिते प्रत्येकस्य योज्य-प्रतिलोमं लिखन्तु।

(i) $x=\frac{11}{15}$ (ii) $x=-\frac{13}{17}$ इत्यनयोः कृते सत्यापितं कुर्वन्तु - $(-x)=x$

4. निम्नलिखितस्य गुणनात्मकं प्रतिलोमं लिखन्तु।

(i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8}\times\frac{-3}{7}$

(v) $-1\times\frac{-2}{5}$ (vi) -1

5. निम्नलिखिते प्रत्येकं गुणनान्तर्गते कृत-उपयोगस्य गुणधर्मस्य नाम लिखन्तु।

(i) $\frac{-4}{5}\times 1=1\times\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}\times\frac{-13}{17}$ (iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19}=1$

6. $\frac{6}{13}$ इत्यस्य $\frac{-7}{16}$ इत्यस्य व्युत्क्रमेण सह गुणाकारं कुर्वन्तु।

7. ज्ञापयन्तु कस्य गुणधर्मस्य सहायता द्वारा भवन्तः $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)$ इति $\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\times\frac{4}{3}$ इति एवं रूपे अभिकलनं कुर्वन्ति।

8. किं $-1\frac{1}{8}$ इत्यस्य गुणात्मकः प्रतिलोमः $\frac{8}{9}$ अस्ति ? कथम् अथवा कथं नहि ?

9. किं $3\frac{1}{3}$ इत्यस्य गुणात्मकः प्रतिलोमः 0.3 अस्ति ? कथम् अथवा कथं नहि ?

10. लिखन्तु -

I. एतादृशी परिमेय-सङ्ख्या यस्याः कोऽपि व्युत्क्रमः न भवेत्।

II. परिमेय-संख्याः याः स्व व्युत्क्रमस्य समानाः सन्ति।

III. परिमेय-सङ्ख्या या स्व ऋणात्मक-समाना अस्ति।

11. रिक्त-स्थानानि पूरयन्तु।

I. शून्यस्य व्युत्क्रमः ----------------- अस्ति।

II. संख्याः -------------- तथा --------------- स्वस्य व्युत्क्रमः अस्ति।

III. ------------------ -5 इत्यस्य व्युत्क्रमः अस्ति।

IV. x इत्यस्य व्युत्क्रमः ------------------ अस्ति।

V. द्वयोः परिमेय-संख्ययोः गुणनफलं सर्वदा ------------------- अस्ति।

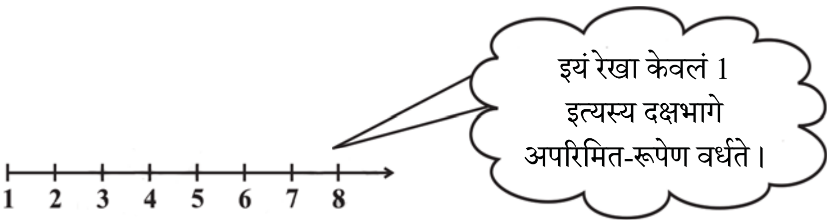
VI. कस्याः अपि धनात्मक-परिमेय-संख्यायाः व्युत्क्रमः ------------ अस्ति।

1.3 परिमेय-संख्यानां संख्यारेखायां निरूपणम्

भवन्तः प्राकृत-संख्यां, पूर्ण-संख्यां, पूर्णाङ्कं,परिमेय-संख्याञ्च संख्या-रेखायां निरूपयितुं शिक्षितवन्तः। वयं तस्याः पुनरावृत्तिं कुर्मः।

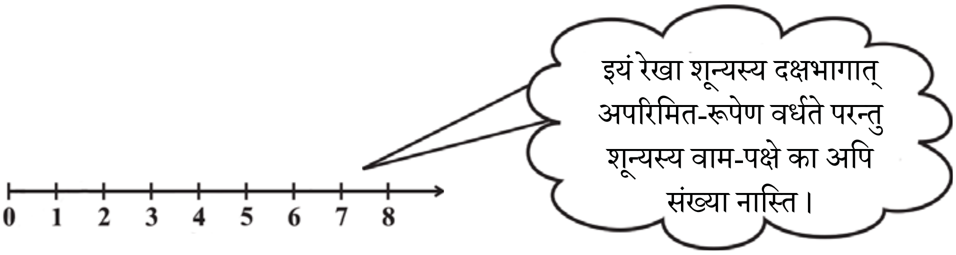
प्राकृत-संख्याः

(i)



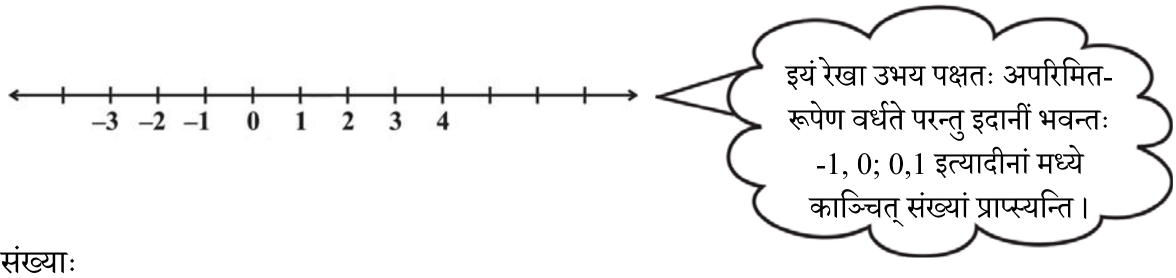
पूर्णसंख्याः

(ii)



पूर्णाङ्कः

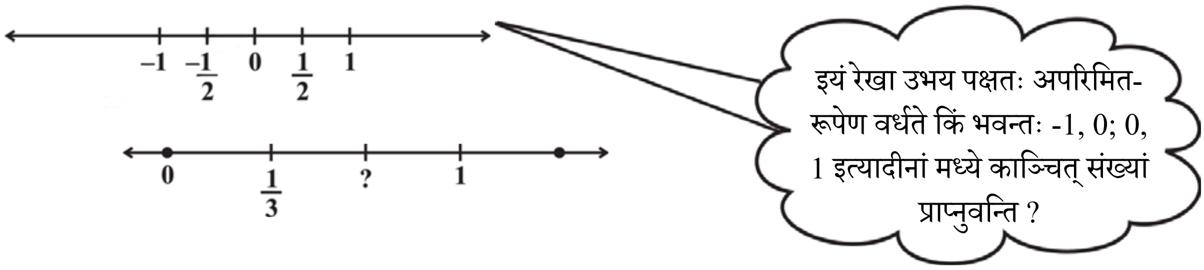
(iii)



परिमेय-संख्याः

(iv)

(v)



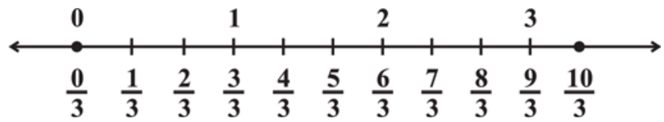
संख्या-रेखा (iv) इत्यस्मिन्सः बिन्दुः यः 0 तथा 1 इत्यनयोः मध्ये अस्ति सः $\frac{1}{2}$ इति अंकितः अस्ति। संख्या-रेखा (v)

इत्यस्मिन् 0 तथा 1 इत्यनयोः मध्ये दूरीं त्रिषु भागेषु विभाजयितुं समदूरस्थेषु बिन्दुषु प्रथमं बिन्दुं $\frac{1}{3}$ रूपे अङ्कितुं शक्यते।

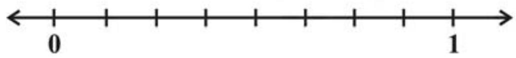
संख्या-रेखा (v) इत्यस्मिन् भाजकबिन्दुतः द्वितीय-बिन्दुं भवन्तः कथं लेखिष्यन्ति ? अंकितमानम् अयं बिन्दुः शून्यस्य दक्षभागे $\frac{1}{3}$ रूपे अङ्कित-बिन्दुतः द्विगुणिते दूरे अस्ति एवं रीत्या एषः $\frac{1}{3}$ इत्यतः द्विगुणितम् अस्ति।

भवन्तः एवमेव संख्या रेखायाः उपरि समदूरस्थं बिन्दुम् अङ्कितुं शक्नुवन्ति। अग्रिमं चिह्नं 1 वर्त्तते। भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 1 तथा $\frac{3}{3}$ एकं समानम् अस्ति।

यथा संख्या-रेखा दर्शिता अस्ति $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}$ एतदनन्तरं आगच्छन्ति।

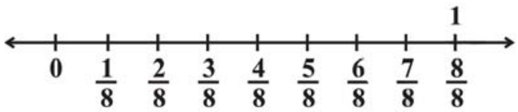
(vi)


एवमेव $\frac{1}{8}$ इति निरूपितुं संख्या-रेखाखण्डं समानेषु अष्ट-भागेषु विभाजयितुं शक्यते यथा निम्नाकृतौ दर्शितम् अस्ति।

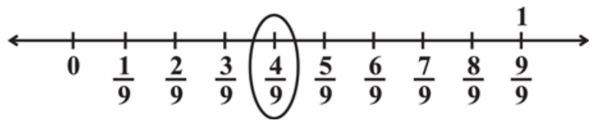


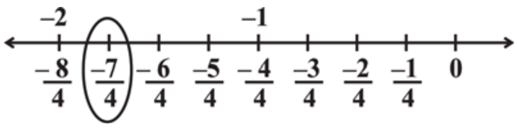
अस्य विभाजनस्य प्रथम-बिन्दोः नाम दातुं वयं संख्यायाः $\frac{1}{8}$ उपयोगं कुर्मः।

विभाजनस्य द्वितीयं बिन्दुं $\frac{2}{8}$ रूपे अङ्कितं भविष्यति, तृतीय-बिन्दुं $\frac{3}{8}$ रूपे तथा एवमेव अग्रेऽपि यथा संख्या-रेखायां (vii) दर्शितम् अस्ति।

(vii)


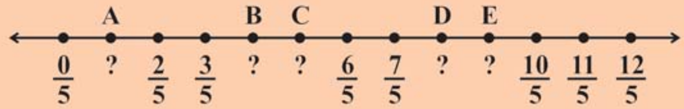
एवमेव संख्या-रेखायां कस्याः अपि परिमेय-संख्यायाः निरूपणं भवितुम् अर्हति। एकस्यां परिमेय-संख्यायां रेखायाः नीचस्थः संख्याङ्कः अर्थात् हरः, एतत् प्रदर्शयति यत् प्रथमम् एककं कतिषु समान-भागेषु विभाजितम्। रेखायाः उपरि स्थितः सङ्ख्याङ्कः। अर्थात् अंशः, एतत् प्रदर्शयति यत् एतेषु समान-भागेषु कति भागाः अत्र सम्मिलिताः इत्थं रूपेण परिमेय-संख्यायाः $\frac{4}{9}$ इत्यस्य अर्थः यत् शून्यस्य दक्ष-भागे 9 समान-भागेषु चतुर्भागः गृहीतः वर्त्तते (संख्या-रेखा viii) तथा $\frac{-7}{4}$ इत्यस्य कृते वयं शून्यात् आरभ्य वामभागे 7 इति चिह्नं योजयामः यस्मिन् प्रत्येकं दूरी $\frac{1}{4}$ अस्ति। सप्तमं चिह्नं $\frac{-7}{4}$ वर्त्तते। [संख्या-रेखा (ix)]।

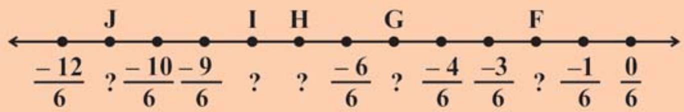
(viii)


(ix) 

प्रयासं करोतु

अक्षरद्वारा अङ्कितस्य प्रत्येकं बिन्दोः कृते परिमेय-संख्यां लिखतु।

(i) 

(ii) 

1.4 द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये परिमेय-संख्याः

किं भवन्तः 1 अथ 5 सङ्ख्यायाः प्राकृत-संख्यां ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति ? ताः प्राकृत-संख्याः 2, 3 तथा 4 अस्ति। 7 तथा 9 संख्या-मध्ये कति प्राकृत-संख्याः सन्ति ? केवलम् एकं, तथा तत् अस्ति 8,10 तथा 11 संख्या-मध्ये कति प्राकृत-संख्याः सन्ति ? स्पष्टरूपेण एकमपि न। -5 अथ 4 मध्ये स्थितानां पूर्णाङ्कानां सूचीं निर्मापयन्तु। एतत् अस्ति -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, -1, तथा 1 मध्ये कति पूर्णाङ्काः सन्ति ? -9 तथा -10 मध्ये कति पूर्णाङ्काः सन्ति ?

भवन्तः द्वयोः प्राकृत-संख्ययोः (पूर्णाङ्कयोः) मध्ये निश्चितप्राकृत-संख्यां प्राप्स्यन्ति।

$\frac{3}{10}$ तथा मध्ये $\frac{7}{10}$ कति परिमेय-संख्याः सन्ति ? सम्भवतः भवन्तः विचारितुं शक्नुवन्ति यत् एताः संख्याः $\frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ तथा $\frac{6}{10}$ एवं सन्ति परन्तु भवन्तः $\frac{3}{10}$ इति $\frac{30}{100}$ अथ $\frac{7}{10}$ इति $\frac{70}{100}$ एवं लेखितुं शक्यते।

साम्प्रतं संख्याः $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}, \ldots. \frac{68}{100}, \frac{69}{100}$ एताः $\frac{3}{10}$ सर्वाः $\frac{7}{10}$ तथा इत्येतासां संख्यानां मध्ये सन्ति। एतासां परिमेय-संख्यानां संख्या 39 अस्ति।

एतदतिरिच्य $\frac{3}{10}$ इति $\frac{3000}{10000}$ तथा $\frac{7}{10}$ इति $\frac{7000}{10000}$ इत्थं रीत्या लेखितुं शक्यते। इदानीं वयं प्राप्नुमः यत् परिमेय-संख्याः $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, \cdots \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$, एताः सर्वाः संख्याः $\frac{3}{10}$ तथा $\frac{7}{10}$ एतयोः मध्ये सन्ति। एताः आहत्य 3999 संख्याः सन्ति।

एवं प्रकारेण वयं $\frac{3}{10}$ तथा $\frac{7}{10}$ एतयोः मध्ये अधिकाधिक-संख्यानां समावेशं कर्तुं शक्नुमः।

अत एव प्राकृत-संख्यानां पूर्णाङ्कानाञ्च सदृशं द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये प्राप्यमाणाः परिमेय-सङ्ख्याः स्थिराः न सन्ति। कस्मिन् अन्यस्मिन् उदाहरणे वयं विचारं कुर्मः। $\frac{-1}{10}$ तथा $\frac{3}{10}$ एतयोः मध्ये कति परिमेय-संख्याः सन्ति ? स्पष्टतया दीयमानासु संख्यासु मध्ये $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$ परिमेय-संख्याः सन्ति।

यदि वयं $\frac{-1}{10}$ इति $\frac{-10000}{100000}$ तथा $\frac{3}{10}$ इति $\frac{30000}{100000}$ रूपे लिखामः तर्हि वयं $\frac{-1}{10}$ तथा $\frac{3}{10}$ मध्ये $\frac{-9999}{100000}, \frac{-9998}{100000}, \ldots \frac{-29998}{100000}, \frac{29999}{100000}$, संख्यां प्राप्नुमः। भवन्तः कयोश्चित् द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-परिमेय-संख्यां प्राप्स्यन्ति।

उदाहरणम् 6 -2 तथा 0 इत्यनयोः मध्ये 3 परिमेय-संख्यां जानातु।

समाधानम् -2 इति $\frac{-20}{10}$ तथा 0 इति $\frac{0}{10}$ रूपे लेखितुं शक्यते। अतः वयं -2 तथा 10 इत्यनयोः मध्ये $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-16}{10}, \frac{-15}{10}, \ldots, \frac{-1}{10}$ परिमेय-संख्यां प्राप्नुमः। भवन्तः एषु कमपि संख्या-त्रयं नेतुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 7 $\frac{-5}{6}$ तथा $\frac{5}{8}$ इत्यनयोः मध्ये 10 परिमेय-संख्यां जानातु।

समाधानम् सर्वप्रथमं वयं $\frac{-5}{6}$ तथा $\frac{5}{8}$ इति संख्यां समान-हर-युत-संख्यारूपे परिवर्त्तयतु।

$$\frac{-5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-20}{24} \text{ तथा } \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$$

एवमेव वयं $\frac{-20}{24}$ तथा $\frac{15}{24}$ इत्यनयोः मध्ये निम्नलिखित-परिमेय-संख्यां प्राप्नुमः। भवन्तः एषु कामपि दश-संख्यां नेतुं शक्नुवन्ति $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, \ldots, \frac{14}{24}$

अन्यः विधिः

आगच्छतु 1 तथा 2 इत्यनयोः मध्ये परिमेय-संख्यां जानीमः। तासु एका संख्या 1.5 अथवा $1\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{2}$ अस्ति। एषः 1 तथा 2 इति संख्यायाः माध्यः वर्त्तते। भवन्तः कक्षा vii मध्ये माध्यविषये पठितवन्तः। एवं रीत्या वयं प्राप्नुमः यत् दीयमानासु संख्यासु मध्ये पूर्णाङ्कः प्राप्तव्यः नास्ति। परन्तु दीयमानासु संख्यासु मध्ये एका परिमेय-संख्या सर्वदा तिष्ठति। वयं दीयमानासु परिमेय-संख्यासु मध्ये परिमेय-संख्यां ज्ञातुं माध्यस्य अवधारणायाः प्रयोगं कुर्मः।

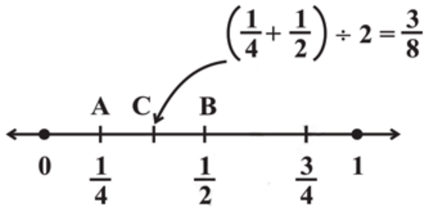
उदाहरणम् 8 $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये एकां परिमेय-संख्यां जानातु।

समाधानम् वयं प्रोक्त-परिमेय-संख्यायाः माध्यं जानीमः।

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\left(\frac{1+2}{4}\right)\div 2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ मध्ये $\frac{3}{8}$ स्थिता अस्ति।

एषा संख्या रेखायां मध्ये अपि द्रष्टुं शक्यते।



वयं AB इत्यस्य C इति मध्य-बिन्दुं इति प्राप्नुमः। यः $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{3}{8}$ रूपे निरूपितः अस्ति।

वयं प्राप्नुमः यत् $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ अस्ति।

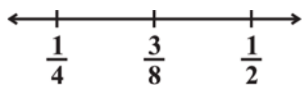
यदि a तथा b केचित् द्वे संख्ये स्तः तर्हि a तथा b इत्यनयोः मध्ये $\frac{a+b}{2}$ एका परिमेय-संख्या इत्थम् अस्ति

यत् $a<\frac{a+b}{2}<b$

एतेन एतदपि ज्ञायते यत् प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-परिमेय-संख्याः भवन्ति।

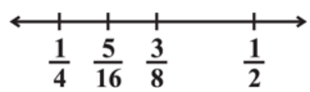
उदाहरणम् 9 $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये परिमेय-संख्या-त्रयं जानातु।

समाधानम् वयं प्रोक्त-संख्यायाः माध्यं जानीमः। यथा उपर्युक्तोदाहरणेषु प्रदत्तम् अस्ति एतासां संख्यानां माध्यः $\frac{3}{8}$ अस्ति तथा $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ अस्ति।



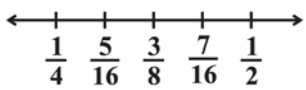
साम्प्रतं $\frac{1}{4}$ इत्यनयोः $\frac{3}{8}$ मध्ये एकां परिमेय-संख्यां जानीमः एतदर्थं वयं पुनः $\frac{1}{4}$ इत्यनयोः $\frac{3}{8}$ माध्यं जानीमः। अर्थात् $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\div 2=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$ अस्ति।

$$\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$$



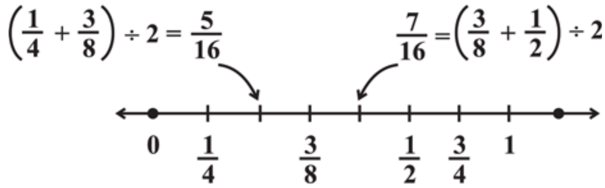
साम्प्रतं $\frac{3}{8}$ इत्यनयोः $\frac{1}{2}$ माध्यं जानातु। $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$ वयं प्राप्नुमः।

एवमेव वयं $\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{7}{16}<\frac{1}{2}$ प्राप्नुमः



$\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये तिस्रः परिमेय-संख्याः $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$ सन्ति।

एतत् स्पष्टतया संख्यारेखायां निम्नरूपेण द्रष्टुं शक्यते।



एवमेव वयं प्रोक्ताषु परिमेय-संख्यासु मध्ये स्व इच्छानुसारेण यावतीं परिमेय-संख्याम् इच्छामि तावतीं ज्ञातुं शक्नुमः। भवन्तः दृष्टवन्तः यत् प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-संख्याः भवन्ति।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित-संख्यां संख्यारेखायां निरूपयन्तु - (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$

2. $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ इति संख्यारेखायां निरूपयन्तु ।

3. एतादृशीं पञ्च परिमेय-संख्यां लिखन्तु या 2 इत्यतः लघु भवेत्।

4. $\frac{-2}{5}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये दशपरिमेय-सङ्ख्याः निरूपयन्तु।

5. (i) $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ तथा $\frac{5}{3}$

(iii) $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{2}$ इत्यनयोः मध्ये पञ्च परिमेय-संख्यां निरूपयन्तु।

6. -2 संख्यायाः बृहत् पञ्च परिमेय-संख्यां लिखन्तु।

7. $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{3}{4}$ इत्यनयोः मध्ये दशपरिमेय-सङ्ख्याः निरूपयन्तु।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. परिमेय-संख्याः योगान्तर्गते, व्यकलनान्तर्गते, गुणनान्तर्गते च संवृताः सन्ति।
2. परिमेय-संख्यानां कृते योगस्य, गुणनस्य च संक्रियाः
   (i) **क्रमविनिमेयाः** सन्ति।
   (ii) **साहचर्याः** सन्ति।
3. परिमेय-संख्यानां कृते शून्यम् इति परिमेय-सङ्ख्या **योज्यः तत्समकः** अस्ति।
4. परिमेय-संख्यानां कृते 1 इति परिमेय-सङ्ख्या **गुणात्मकः तत्समकः** अस्ति।
5. परिमेय-संख्या $\frac{a}{d}$ इत्यस्य **योज्य-प्रतिलोमः** - $\frac{a}{b}$ अस्ति तथा विलोमतः अपि सत्यम् अस्ति।
6. यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} = 1$, तर्हि संख्या $\frac{a}{b}$ इत्यस्य व्युत्क्रमः अथवा **गुणात्मक-प्रतिलोमः** $\frac{c}{d}$ अस्ति।
7. परिमेय-संख्यानां **वितरकता** परिमेय-संख्याः a, b तथा c इत्यस्य कृते $a(b + c) = ab + ac$ तथा $a(b - c) = ab\text{-}ac$ अस्ति।
8. परिमेय-संख्यां संख्यारेखायां निरूपयितुम् शक्यते।
9. प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये अपरिमित-परिमेय-संख्याः भवन्ति। प्रोक्तयोः द्वयोः परिमेय-संख्ययोः मध्ये परिमेय-संख्यां ज्ञातुं माध्यस्य अवधारणा सहायिका भवति।

नोट

नोट